## Exercice 6.4

On considère l'écrouissage sur roue dans lequel une plaque d'aluminium d'épaisseur e, initialement à vitesse verticale, **V**, tourne à 90 degrés autour d'une roue de rayon R (voir figure de l'ex. 6.3) sans glissement et à vitesse angulaire ω. On se propose de calculer l'épaisseur de la plaque en supposant que la déformation en entrée de roue se fait linéairement entre les angles $\theta = 0$ et $\theta = \theta_0$ et que la masse spécifique ρ du métal est constante. On posera $e_0$ l'épaisseur de la plaque en $\theta = \theta_0$.

Exprimer le champ de vitesse en $\theta_0$

Le champ vaut $\vec{v} = r\omega\vec{e}_\theta$

Calculer des flux de matière en $\theta = 0$ et $\theta = \theta_0$ pour une largeur L constante de la plaque.

en $\theta = 0$ :

$$\Phi = \int_S \rho\vec{v}.\vec{n}dS = \int_S \rho R\omega\vec{e}_\theta.\vec{e}_\theta dS = \int_S \rho R\omega dS = \rho R\omega Le$$

en $\theta = \theta_0$,

$$\Phi = \int_S \rho\vec{v}.\vec{n}dS = \rho L \int_R^{R+e_0} r\omega\vec{e}_\theta.\vec{e}_\theta dr == \rho L\omega \int_R^{R+e_0} rdr = \frac{\rho\omega L}{2}\left[\left(R+e_0\right)^2 - R^2\right]$$

$$\Phi = \frac{\rho\omega L}{2}\left[2Re_0+e_0^2\right]$$

En déduire la valeur $e_0$ de l'épaisseur de la plaque en $\theta_0$ en fonction de R et e.

Le flux de matière est conservé :

$$\Phi = \rho R\omega Le = \frac{\rho\omega L}{2}\left[2Re_0+e_0^2\right]$$

soit $2Re_0+e_0^2 = 2Re$ ou encore $e_0^2 + 2Re_0 - 2Re = 0$

$$e_0 = \frac{-2R+2R\sqrt{1+2e/R}}{2} = R\sqrt{1+2e/R} - R = R\left(\sqrt{1+2e/R} - 1\right)$$

Si $e \ll R$, $e_0 = R\left(1+e/R-1\right) = e$

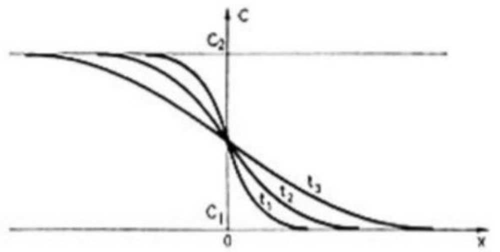
$$\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2 \quad \text{soit} \quad e_0 \approx R\left(1+e/R-\frac{1}{8}\left(\frac{2e}{R}\right)^2 - 1\right) = e - \frac{e^2}{2R}$$

Que se passe-t-il en sortie de roue ? Que représente ce procédé pour le métal ?

En sortie de roue, la feuille de métal subit une compression avec une augmentation d'épaisseur de e0 à e. Le métal subit donc 2 déformations successives surtout sur la face extérieure qui mènent à son écrouissage et à un durcissement associé. Eventuellement la température de la feuille augmente un peu. Tout ceci reste vrai si la largeur L de la feuille reste constante.

## Exercice 6.6 Couple de diffusion

On met en contact deux blocs métalliques en alliage AB de compositions différentes en éléments B et on dépose le tout dans un four de facon à activer la diffusion chimique. L'interface entre les deux blocs se trouve en x = 0. On note c2 la concentration initiale uniforme en B du bloc de gauche (x<0) et c1 la concentration du bloc de droite (x>0).




Evolution des profils de concentration avec la durée de diffusion : interdiffusion.

1. Ecrire l'équation que doit satisfaire la concentration en atome B, c(x,t), fonction de x et du temps t. On note D le coefficient de diffusion chimique de l'atome B.

C(x,t) doit vérifier l'équation de Fick sans terme d'advection : $\dfrac{\partial C}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2}$

2. La solution de l'équation ci-dessus est donnée par $c(x,t) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} c_0(u)e^{-\frac{(x-u)^2}{4Dt}}du$ ou $c_0(u) = c(x,t=0)$ est le profil initial de concentration. Calculer alors la solution c(x,t) en faisant apparaitre la fonction erreur $\mathrm{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-u^2}du$ avec $\mathrm{erf}(\infty)=1$.

$$C(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\left(\int_{-\infty}^{0} c_2 e^{-\frac{(x-u)^2}{4Dt}}du + \int_0^{\infty} c_1 e^{-\frac{(x-u)^2}{4Dt}}du\right)$$ puisque $c_0(u)=c_2$ pour $u < 0$ et $c_1$ pour $u > 0$.

On pose $v = \dfrac{x-u}{\sqrt{4Dt}}$, $dv = \dfrac{-du}{\sqrt{4Dt}}$, il vient $C(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\left(-\displaystyle\int_{\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4Dt}}} c_2 e^{-v^2}dv - \int_{\frac{x}{\sqrt{4Dt}}}^{-\infty} c_1 e^{-v^2}dv\right)$

Or $\mathrm{erf}(\infty) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-v^2}dv = 1 = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x} e^{-v^2}dv + \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty} e^{-v^2}dv$

Ainsi $C(x,t) = \dfrac{c_2}{2}\left(1-\mathrm{erf}\left(\dfrac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)\right) + \dfrac{c_1}{2}\left(1+\mathrm{erf}\left(\dfrac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)\right)$ avec $\mathrm{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-u^2}du$ et $\mathrm{erf}(\infty)=1$

$$C(x,t) = \frac{c_1+c_2}{2} + \frac{c_1-c_2}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)$$

3. Que valent $c(x=0,t)$ et $c(x,t=\infty)$ ?

$C(x=0,t) = \dfrac{c_1+c_2}{2} + \dfrac{c_1-c_2}{2}\mathrm{erf}(0) = \dfrac{c_1+c_2}{2}$, concentration à l'interface

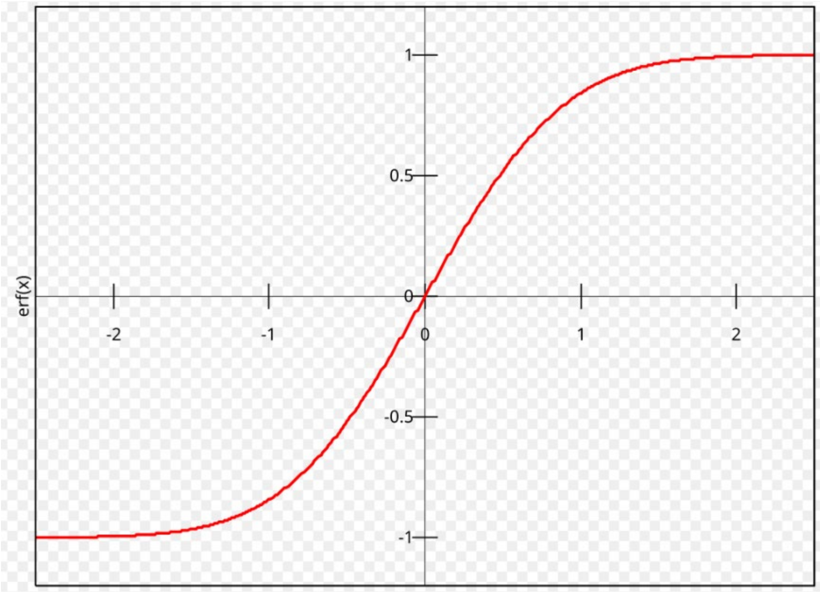
$C(x,\infty) = \dfrac{c_1+c_2}{2} + \dfrac{c_1-c_2}{2}\mathrm{erf}(0) = \dfrac{c_1+c_2}{2}$, concentration en tout x après un temps infini

NB: on peut "suivre" le point de concentration $c_1$ (en fait c à peine supérieure à $c_1$) en approximant erf(2) par 1:

$C(x,t) = c_1 = \dfrac{c_1+c_2}{2} + \dfrac{c_1-c_2}{2}\mathrm{erf}\left(\dfrac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)$ si $\mathrm{erf}\left(\dfrac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) \simeq 1$ i.e $\dfrac{x}{2\sqrt{Dt}} = 1$ soit $x = 4\sqrt{Dt}$

On trouve que la longuer de diffusion chimique varie comme $\sqrt{Dt}$.

Fonction erf(x) :




**NB1:** on vérifie mathématiquement la solution de l'équation de Fick sans terme de transport en utilisant $\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,x,t)du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f(u,x,t)}{\partial t}du$.

$$C(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\int_{-\infty}^{+\infty} C_0(u)e^{-\frac{(x-u)^2}{4Dt}}du$$ : dérivée en temps

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{-1}{4t\sqrt{\pi Dt}}\int_{-\infty}^{+\infty} C_0(u)e^{-\frac{(x-u)^2}{4Dt}}du + \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\int_{-\infty}^{+\infty} C_0(u)\frac{(x-u)^2}{4Dt^2}e^{-\frac{(x-u)^2}{4Dt}}du$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{-1}{4t\sqrt{\pi Dt}}\int_{-\infty}^{+\infty} C_0(u)e^{-\frac{(x-u)^2}{4Dt}}du + \frac{1}{8Dt^2\sqrt{\pi Dt}}\int_{-\infty}^{+\infty} C_0(u)(x-u)^2e^{-\frac{(x-u)^2}{4Dt}}du$$

$$C(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\int_{-\infty}^{+\infty} C_0(u)e^{-\frac{(x-u)^2}{4Dt}}du$$ , seconde dérivée en x:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{-1}{4Dt\sqrt{\pi Dt}}\int_{-\infty}^{+\infty} C_0(u)(x-u)e^{-\frac{(x-u)^2}{4Dt}}du$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{-1}{4Dt\sqrt{\pi Dt}}\int_{-\infty}^{+\infty} C_0(u)e^{-\frac{(x-u)^2}{4Dt}}du + \frac{1}{8D^2t^2\sqrt{\pi Dt}}\int_{-\infty}^{+\infty} C_0(u)(x-u)^2e^{-\frac{(x-u)^2}{4Dt}}du$$

$$D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{-1}{4t\sqrt{\pi Dt}}\int_{-\infty}^{+\infty} C_0(u)e^{-\frac{(x-u)^2}{4Dt}}du + \frac{1}{8Dt^2\sqrt{\pi Dt}}\int_{-\infty}^{+\infty} C_0(u)(x-u)^2e^{-\frac{(x-u)^2}{4Dt}}du = \frac{\partial C}{\partial t}$$

C(x,t) est bien solution de l'équation de Fick en 1D et sans transport.

**NB2 :** on peut approximer le profil initial de concentration de la fig. 6.6 par :

$C_0(u) = \frac{1}{2}\left(1+\tanh(u/\delta)\right)$: profil initial de B avec u = x

Le profil initial de concentration en atome B, $c_0(x=u)$ passe d'un niveau nul pour x très négatif à 1/2 en x =0 et croit vers 1 pour x grand. La montée de 0 à 1 se fait sur une distance caractéristique de δ.

$$C_0(u) = \frac{1}{2}\left(1+\tanh(u/\delta)\right)\text{: profil initial de B avec u = x}$$

Calcul de c(x=0,t) et c(x,t=∞)

$$\text{La solution est: } C(x,t) = \frac{1}{4\sqrt{\pi Dt}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\tanh(u/\delta)\right)e^{-\frac{(x-u)^2}{4Dt}}du$$

$$c(x=0,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-\frac{(u)^2}{4Dt}}du = \frac{2\sqrt{Dt}}{4\sqrt{\pi Dt}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-v^2}dv = 1/2 \text{ en posant } v = \frac{u}{2\sqrt{Dt}} \text{ et } dv = \frac{du}{2\sqrt{Dt}}$$

$$\text{et } c(x,t=\infty) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-\frac{(x-u)^2}{4Dt}}du = \frac{2\sqrt{Dt}}{4\sqrt{\pi Dt}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-v^2}dv = 1/2 \text{ avec } v = \frac{u-x}{2\sqrt{Dt}} \text{ et } dv = \frac{du}{2\sqrt{Dt}} \text{ car x est fixé}$$

Aux temps infinis, la concentration en B vaut 0.5 partout car la diffusion a eu le temps d'agir.

**Exercice 6.9: Diffusion d'un effluent gazeux**

Un effluent gazeux nocif est émis (débit massique $q_m$) par une cheminée de hauteur h dans une région où souffle un vent de vitesse $\vec{V} = v\,\vec{u}_x$ dans la direction x de la Figure 1.

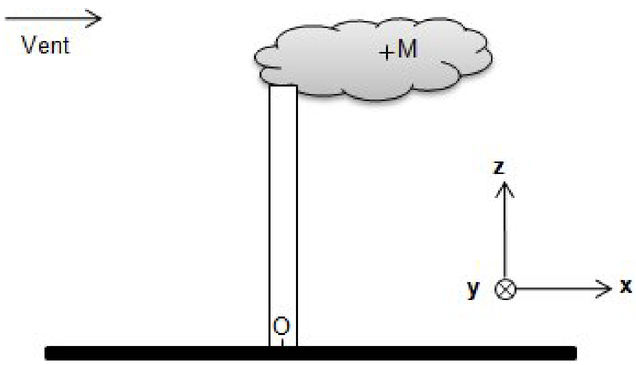



**Figure 1 – géométrie du problème**

On cherche à étudier la concentration massique $c(M,t)$ en effluent au point M à l'instant t. Lors de son transport par le vent, l'effluent diffuse dans l'air et on notera D (m2/s) son coefficient de diffusion.
Equation globale de conservation de l'effluent en un point M situé hors de la source.

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathrm{div}\,c\vec{v} + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0 \quad \text{avec } \vec{j} = -D\vec{\nabla}c \qquad \text{(éq. 6.31 du poly sans terme de source)}$$

Conditions pour que cette équation se réduit à l'équation (1) ?

$$v\frac{\partial c}{\partial x} = D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\right) \qquad \text{(eq. 1)}$$

Les conditions sont: 1) régime stationnaire (dérivé temporelle nulle), 2) coefficient D et vitesse du vent constant (pas de dépendance spatiale) et 3) diffusion dans la direction du vent négligeable $D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right)$ devant le transport $v\frac{\partial c}{\partial x}$.

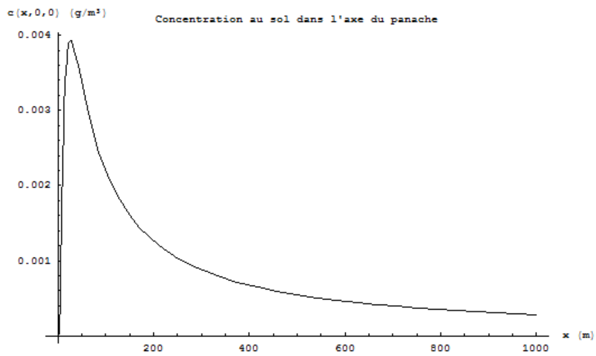
La solution de l'équation (1) est donnée par le modèle de source ponctuelle :

$$c(M) = \frac{q_m}{2\pi Dx}\exp\left(-\frac{V}{4Dx}\left(y^2+(z-h)^2\right)\right) \qquad \text{(eq. 2)}$$

On vérifie que c(M) est bien solution de (1), ceci en posant $u = -\frac{V}{4Dx}\left(y^2+(z-h)^2\right)$

On souhaite étudier la présence de l'effluent au sol dans la direction du vent. Etudier la fonction c(x, 0, 0) et tracer son évolution en posant $c_{max}$ le maximum de concentration et $x_{max}$ la position de ce maximum.

$c(x,0,0) = \frac{q_m}{2\pi Dx}\exp\left(-\frac{Vh^2}{4Dx}\right)$ part de 0 en x = 0, monte vers $c_{max} = \frac{2q_m}{\pi h^2 ve}$ en $x_{max} = \frac{h^2 v}{4D}$ et redescend ensuite vers 0 en l'infini :




Calculer $c_{max}$ et $x_{max}$ pour D = 36 m2/s, qm = 32.6 g/s, h = 18 m et V = 3 m/s. La valeur maximale réglementaire de 3 mg/m³ d'effluent est-elle dépassée au sol ?

$c_{max} = \frac{2q_m}{\pi h^2 ve} = 7.85\ mg/m^3$ en $x_{max} = \frac{h^2 v}{4D} = 6.75\ m$. La valeur maximale réglementaire de 3 mg/m³ d'effluent est dépassée au sol.

Un ingénieur propose d'augmenter la vitesse du vent en installant une soufflerie. Avez-vous une alternative plus efficace ?

$c_{max} = \frac{2q_m}{\pi h^2 ve}$ décroit quand qm baisse, v augmente et h augmente mais l'effet de h est au carré donc il est bp plus efficace d'augmenter h un peu que d'augmenter v par une soufflerie.